BEN'S HOBBYHOEKJE

Complexe getallen in JavaScript

Korte beschrijving van de wiskunde van de complexe getallen

Inleiding

De "gewone" wiskunde bedient zich uitsluitend van getallen die betrekkelijk eenvoudig te begrijpen zijn. Zo weet iedereen wat de cijfers *0, 1, 2, 3, 4, enz.* betekenen. Ook getallen zoals *0,5* en *1½* zijn goed te behappen.

Er zijn positieve getallen (die zijn groter dan nul) en negatieve getallen (die zijn kleiner dan nul). En dan is er natuurlijk het getal *nul* zelf.

Deze getallen worden ***Reële getallen*** genoemd,
omdat het *"echte"*, begrijpbare getallen zijn.

Men noemt dit ook wel: De verzameling van de reële getallen.
Reële getallen hebben veel verschillende eigenschappen, waarvan er voor dit betoog één heel belangrijk is:

- Als je een reëel getal met zichzelf vermenigvuldigt is het resultaat ALTIJD *groter dan of gelijk aan nul*.

  In wiskundige notatie: $x^2 \geq 0$.

Wiskundigen hebben zich het hoofd gebroken over de vraag of $x^2 < 0$ zou kunnen bestaan. Men heeft geconcludeerd dat dit met reële getallen niet mogelijk is. Om toch met $x^2 < 0$ te kunnen rekenen heeft men een *"Imaginair" getal i* bedacht waarvoor geldt:

$$i^2 = -1$$

Met de aanname van dit imaginare getal i is een interessante uitbreiding van de wiskunde ontstaan, waar veel gebruik van wordt gemaakt. Zo zijn bijvoorbeeld de trigoniometrische functies *sinus* en *cosinus* heel goed te beschrijven met complexe getallen.

Reële en imaginaire getallen

Voor elk reëel getal a geldt dat er altijd wel een getal te vinden is dat groter is dan a, maar ook dat er altijd wel een getal te vinden is dat kleiner is dan a. Je kunt alle reële getallen op een lijn achter elkaar zetten. Dat heet een getallenlijn.

Voor elk imaginair getal b geldt dat er altijd wel een getal te vinden is dat groter is dan b, maar ook dat er altijd wel een getal te vinden is dat kleiner is dan b. Ook alle imaginaire getallen kun je op een getallenlijn zetten.

Deze twee getallenlijnen hebben één punt gemeen: 0 (nul). Verder hebben ze niets met elkaar gemeen (reële getallen bestaan echt, imaginaire getallen bestaan alleen in je gedachten). Deze twee lijnen staan daarom loodrecht op elkaar.
Twee snijdende lijnen vormen een vlak. Dit wordt het *complexe vlak* genoemd.
Formeel gesteld: De getallenlijnen met de reële en imaginaire getallen vormen een orthogonale basis van het complexe vlak.

Complexe getallen

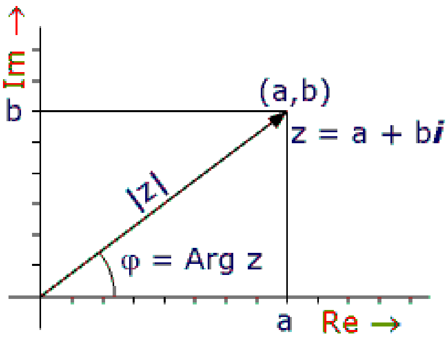
Een complex getal is een samenvoeging van een reëel getal en een imaginair getal. Elk complex getal is dus opgebouwd uit twee delen: Het reële deel en het complexe deel. Als het

reële deel gelijk is aan nul heb je een zuiver imaginair getal. Als het complexe deel gelijk is aan nul heb je een reëel getal.
Laten we het reële deel *a* noemen, en het complexe deel *b*. Je kunt een complex getal *z* dan schrijven als z = a + b***i***, maar ook als een geordend paar: z = (a,b).

De rekenregels voor complexe getallen verschillen niet van de rekenregels voor reële getallen. Je moet alleen wel in de gaten houden dat complexe getallen uit paren bestaan, waardoor de uitvoering van de berekeningen afwijkt.

Vectorvoorstelling in het complexe vlak

Je kunt het getallenpaar (*a*,*b*) ook beschouwen als een vector in het complexe vlak. Hierbij is *a* de projectie op de reële as en *b* de projectie op de imaginaire as. Zie de figuur.



Modulus en Argument

Als z = a + b***i***, dan is de *modulus van z* gelijk aan:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Eigenlijk is dit gewoon de lengte van de vector (a,b) in het complexe vlak.

De hoek die de vector (a,b) maakt met de reële as wordt het *argument van z* genoemd. Dit wordt gewoonlijk aangeduid met *Arg z*, maar als er geen verwarring mogelijk is ook wel met de Griekse letter φ (phi):

$$\varphi = \arctan(b/a)$$

φ wordt meestal uitgedrukt in radialen. Om praktische redenen is het ook wel eens handig om φ in graden te schrijven.

Eenvoudig is in te zien dat:

$$\cos\varphi = a / |z| \quad \text{en} \quad \sin\varphi = b / |z|$$

Merk op dat je vector (a,b) ook kunt interpreteren als rechthoekige coördinaten die een complex getal aanduiden. De aanduiding van hetzelfde punt in termen van |z| en φ is de notatie in poolcoördinaten.

Rekenregels

Hier staan de regels voor het rekenen met complexe getallen. Er wordt steeds van uit gegaan dat:

$z_1 = a + b\boldsymbol{i}$

$z_2 = c + d\boldsymbol{i}$

Eigenschappen die voor het rekenen met reële getallen gelden, gelden ook voor complexe getallen:

°	Commutatieve eigenschap	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ $z_1 * z_2 = z_2 * z_1$
°	Associatieve eigenschap	$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ $(z_1 * z_2) * z_3 = z_1 * (z_2 * z_3)$
°	Distributieve eigenschap	$x(z_1 + z_2) = xz_1 + xz_2$

Optellen: Complex getal + Complex getal

Tel de reële en complexe delen afzonderlijk bij elkaar op.

$$\underline{\underline{z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)\boldsymbol{i}}}$$

Aftrekken: Complex getal - Complex getal

Trek de reële en complexe delen afzonderlijk van elkaar af.

$$\underline{\underline{z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)\boldsymbol{i}}}$$

Vermenigvuldigen: Reëel getal * Complex getal

Vermenigvuldig het reële en complexe deel afzonderlijk met het reële getal.

$$\underline{\underline{x * z_1 = x(a + b\boldsymbol{i}) = xa + xb\boldsymbol{i}}}$$

Vermenigvuldigen: Complex getal * Complex getal

Vermenigvuldig de complexe getallen zoals je factoren vermenigvuldigt.
Vervang daarbij $\boldsymbol{i}^2$ door –1.

$$z_1 * z_2 = (a + b\boldsymbol{i}) * (c + d\boldsymbol{i})$$

$$z_1 * z_2 = ac + bc\boldsymbol{i} + ad\boldsymbol{i} + bd\boldsymbol{i}^2$$

$$\underline{\underline{z_1 * z_2 = (ac - bd) + (bc + ad)\boldsymbol{i}}}$$

Delen: Complex getal / Complex getal

Een complex getal in de noemer is lastig om uit te werken. Daarom gebruik je een trucje om de noemer reëel te maken.
Stel: de breuk is:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + b\boldsymbol{i}}{c + d\boldsymbol{i}}$$

Dan vermenigvuldig je die met:

$$1 = \frac{c - d\boldsymbol{i}}{c - d\boldsymbol{i}}$$

Er staat dan:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + b\boldsymbol{i}}{c + d\boldsymbol{i}} * \frac{c - d\boldsymbol{i}}{c - d\boldsymbol{i}}$$

Als je dat uitwerkt ontstaat er:

$$\underline{\underline{\frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)\boldsymbol{i}}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\boldsymbol{i}}}$$

Dit is "gewoon" te berekenen.

Delen: 1 / Complex getal

Hier heb je hetzelfde probleem als bij het delen van twee complexe getallen op elkaar: een complexe noemer is lastig. Je gebruikt dezelfde truc:

$$\underline{\underline{\frac{1}{z_2} = \frac{1}{c + d\boldsymbol{i}} = \frac{1}{c + d\boldsymbol{i}} * \frac{c - d\boldsymbol{i}}{c - d\boldsymbol{i}} = \frac{c - d\boldsymbol{i}}{c^2 + d^2}}}$$

Machtsverheffen: Complex getal verheffen tot Reële macht

Als de exponent een geheel getal is, is het betrekkelijk eenvoudig:

- Exponent > 0: Gewoon vermenigvuldigen, bijvoorbeeld: $\underline{\underline{z^3 = z * z * z}}$.
- Exponent = 0: resultaat is 1.
- Exponent < 0: Merk op dat $z^{-n} = 1/z^n$. Bepaal z^n en vervolgens $1/z^n$ zoals hiervoor is beschreven.

De exponent kan ook een gebroken getal zijn, bijvoorbeeld 2.5:

$$z^{2.5} = z^{5/2} = \sqrt{z^5}\ .$$

Om dit te bepalen moet je gebruik maken van de stelling van De Moivre:

$$\underline{z^n = |z|^n(\cos n\varphi + \boldsymbol{i}\sin n\varphi)}$$

Hierin is |z| de modulus van z en is φ het argument van z.
Dus, als:

$$z = a + b\boldsymbol{i}$$

Dan is:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

en:

$$\varphi = \arctan(b/a)$$

Voorbeeld:
Stel: $z = 3 + 4\boldsymbol{i}$ dan wordt $\sqrt{z^5} = z^{2.5}$ berekend als volgt:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

$$\varphi = \arctan(b/a) = \arctan(4/3) = 53.13\ldots° = 0.927\ldots \text{rad.}$$

$$|z|^{2.5} = \sqrt{5^5} = \sqrt{3125} = 55.9...$$

$$2.5\varphi = 2.318\ldots \text{ rad.}$$

De uitkomst is:

$$\sqrt{z^5} \quad = \quad 55.9\ldots(\cos 2.318\ldots + \boldsymbol{i}\sin 2.318\ldots)$$

$$\underline{\underline{\sqrt{(3 + 4\boldsymbol{i})^5} = -38 + 41\boldsymbol{i}}}$$